# *ECG1* *TD n°16 : Formules de Taylor et développements limités*

**Exercice 1. Dérivée n-ième**

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Montrer que les fonctions suivantes sont de classe $C^n$ sur leur ensemble de définition, et déterminer leur dérivée $n$-ème :

$$f_1(x) = xe^{-x} \qquad f_2(x) = x^2 e^x \qquad f_3(x) = \frac{1}{1-x} \qquad f_4(x) = \frac{1}{(x-1)^2} \qquad f_5(x) = \frac{1}{ax+b} \qquad f_6(x) = (ax+b)^\alpha \text{ avec } \alpha \in \mathbb{N}$$

**Exercice 2. Fonction de classe $C^\infty$**

Soit la fonction définie sur $]-1,1[$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

1. Montrer que $f$ est de classe $C^\infty$ sur $]-1,1[$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{\frac{2n+1}{2}}}.$$

   On précisera la relation de récurrence entre $P_{n+1}$ et $P_n$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n$ est de degré $n$ et de coefficient dominant $n!$.

**Exercice 3. Formule de Taylor et inégalités**

1. Montrer que, pour tout entier naturel $n$ et pour tout réel $x$ :

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^{-t}\, \mathrm{d}t$$

2. On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\quad g(x) = 1 - e^{-x}$
   En écrivant l'égalité précédente pour $n = 2$ et $n = 3$, montrer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ \ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leqslant x - g(x) \leqslant \frac{x^2}{2}$$

**Exercice 4. Formule de Taylor avec reste intégral**

A l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer pour tout réel $x$ positif :

$$1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{1}{2}x^2 \qquad 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1}{2}x \qquad x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

**Exercice 5. Utilisation des développements limités pour déterminer des équivalents simples**

En utilisant un développement limité à un ordre convenable, donner un équivalent simple en 0 de :

$$f_1(x) = e^x - \cos(x) - \sin(x) \qquad f_2(x) = \ln(1+x) - x \qquad f_3(x) = e^{x+1} - (1+x)^e - (e-1)$$

**Exercice 6. Utilisation des développements limités pour calculer des limites**

A l'aide des développements limités et des équivalents, calculer les limites suivantes : (on pourra utiliser les équivalents ainsi que les développements limités à un ordre convenable)

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \qquad b)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \qquad c)\ \lim_{x\to 0} \frac{(x-1)e^x + 1}{x(e^x - 1)}$$

$$d)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x} - (1+x)}{x^2} \qquad e)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \sin x}{\cos x - 1} \qquad f)\ \lim_{x\to +\infty} x\ln(1+x) - x\ln(x)$$

**Exercice 7. Développements limités à l'ordre 3**

Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \ln(1+x)\cos(x) \qquad f_2(x) = \sin(2x) \qquad f_3(x) = xe^{2x+1} \qquad f_4(x) = \frac{1-\cos(x)}{x^2} \qquad f_5(x) = \frac{e^x}{1+x}$$

**Exercice 8. Etude de la régularité avec les développements limités**

On note $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{e^x - e^{-x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Justifier que la fonction $f$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser la valeur de $f'(0)$.

**Exercice 9. Fonction de classe $C^1$**

On note $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Montrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 10. Position locale de la tangente**

Soit $f$ la fonction pour tout $x > -1$ définie par $f(x) = (x-1)\sqrt{1+x} + \ln(1+x)$.

1. Donner le développement limité de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ et $x \mapsto \ln(1+x)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.
2. En déduire l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ et la position de la tangente par rapport à la courbe.

**Exercice 11. Étude locale au voisinage de 0**

Répondre aux questions suivantes pour chacune des fonctions indiquées :

a) Déterminer le développement limité de $f$ à l'ordre 2 en 0.
b) Donner sans calcul $f(0)$ et $f'(0)$.
c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse 0.
d) Tracer la représentation graphique (locale) de $f$ au voisinage de 0.

1. $f(x) = e^x + e^{-x}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$
3. $f(x) = \ln(\sqrt{1-2x^2}\,) - x$
4. $f(x) = \dfrac{(1+x)^3}{(1-x)^2}$

**Exercice 12. Limite d'une suite définie par une somme**

1. Montrer que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln(2)$.
2. A l'aide d'une formule de Taylor, montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $|e^x - 1 - x| \leq \dfrac{ex^2}{2}$.
3. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{k+n}} - n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\right| \leq \dfrac{e}{2n}$.
4. En déduire la limite quand $n$ tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+k}} - n$.

**Exercice 13. Suite particulière**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n e^{-a_n} = 1$.

**Exercice 14. Dérivée d'ordre 2**

Soit $f$ une fonction de classe $C^\infty$ au voisinage de 0. Déterminer la limite en 0 de $\dfrac{f(x) + f(-x) - 2f(0)}{x^2}$.

**Exercice 15. Utilisation des développements limités pour trouver des asymptotes obliques**

Soit $f$ la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé.

1. Déterminer le domaine de définition de $f$.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 1 en 0 de $\sqrt{1+t}$.
3. En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet des asymptotes obliques au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ et étudier la position locale de $\mathcal{C}_f$ par rapport à ses asymptotes.